

## 2026 年“星火杯”第五届线上联合测试

## 数 学

## 注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z = 1 + bi$  的模为  $\sqrt{10}$ ，则正数  $b =$   
A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4
2. 设集合  $A = \{x \mid -6 < x^3 + x < 6\}$ ，则  $A \cap \mathbf{Z}$  的元素个数为  
A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5
3. 样本数据 2, 8, 14, 16, 20 的 80% 分位数是  
A. 5                      B. 8                      C. 16                     D. 18
4. 已知圆柱的底面半径是圆锥的 2 倍，它们的体积相等，则圆锥的高是圆柱的  
A. 12 倍                 B. 6 倍                   C. 4 倍                   D. 3 倍
5. 函数  $f(x) = \sin x + e^x$  在  $[-7, 0]$  上的零点个数为  
A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5
6. 定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(2-x)$ ，且当  $0 < x \leq 1$  时， $f(x) = 2^x$ ，  
则  $f(\log_2 20) =$   
A. 2                      B. 1.5                    C. 1.25                   D. 1
7. 已知直线  $l: y = kx + 1 (k > 0)$  交  $x$  轴于点  $A$ ，交抛物线  $C: x^2 = 4y$  于点  $M, N$ ，点  $M$  在点  $N$  左侧. 若  $C$  的焦点为  $F$ ，且  $|NF| = 2|AM|$ ，则  $k =$   
A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{6}$

8. 在锐角  $\triangle ABC$  中,  $A \leq B \leq C$ , 且  $\tan A, \tan B, \tan C$  不能构成三角形的三边. 若  $AB = 4$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为
- A.  $4\sqrt{2}$                   B.  $4\sqrt{3}$                   C.  $2\sqrt{2}$                   D.  $2\sqrt{3}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设点  $A(2,1), B(3,3), C(4,x)$ , 若  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{AC}$  夹角为锐角, 则  $x$  可以是
- A.  $-1$                   B.  $2$                   C.  $5$                   D.  $8$
10. 已知  $M$  为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  上一动点,  $N$  为平面内一定点. 设  $t$  为  $M$  点的横坐标, 若  $|MN|$  可表示为  $t$  的函数  $f(t)$ , 则
- A.  $N$  的坐标可以为  $(1,0)$                   B.  $N$  的坐标可以为  $(0,1)$
- C.  $\sqrt{3}$  可能为  $f(t)$  的极小值                  D.  $\frac{1}{2}$  可能为  $f(t)$  的极小值点
11. 夹角为  $\theta$  的两条直线  $l_1, l_2$  与曲线  $W: y = ax^3 + (1-a)x + 1$  ( $0 < a \leq 1$ ) 相切, 其斜率分别为  $k_1, k_2$  ( $k_1 > k_2$ ), 且  $l_1, l_2$  的交点在  $W$  上. 则
- A. 点  $(0,1)$  为  $W$  的对称中心                  B.  $k_2$  的取值范围是  $[0, +\infty)$
- C.  $k_1 \leq 4k_2$                   D.  $0 < \tan \theta \leq \frac{3}{4}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 记正项等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_1 = 1, 4S_2 = (a_2 + 1)^2$ , 则  $S_9 =$  \_\_\_\_\_.
13. 已知  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A, \omega > 0$ ) 与  $x$  轴的两个交点为  $M, N$ , 与直线  $y = A$  的一个交点为  $P$ , 若  $\triangle MNP$  是等腰直角三角形, 则  $A\omega$  的最小值为 \_\_\_\_\_.
14. Santa、六月松等 5 人按某一顺序落座在圆桌的周围, 随后他们起立, 并随机落座. 现每次均以 Santa 所在位置作为 1 号位, 并按顺时针顺序编号为 1 号到 5 号, 则两次落座中所在座位编号相同人数的期望为 \_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

一个不透明的袋子中有 8 个大小和形状完全一致的小球，其中标记数字 1, 2 的小球各有 3 个，标记数字 3 的小球有 2 个。现一次性从袋子中随机摸出 3 个小球。

- (1) 求摸出的小球中，有标记数字为 3 的小球的概率；
- (2) 记摸出的小球上标记的最大数字为  $X$ ，求  $X$  的分布列。

16. (15 分)

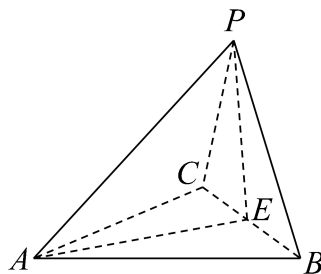
已知  $(-1,0)$ ， $(2,3)$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  上的两点。

- (1) 求  $C$  的焦距；
- (2) 设  $F_1$ ， $F_2$  分别为  $C$  的左右焦点，过  $F_2$  的直线  $l$  与  $C$  的右支交于点  $M$ ， $N$ ，若  $\triangle F_1MN$  周长为 16，求  $l$  的方程。

17. (15 分)

如图，在三棱锥  $P-ABC$  中， $\triangle ABC$  是等边三角形， $\angle PAB = \angle PAC = \alpha$ ， $E$  为  $BC$  中点。

- (1) 证明： $BC \perp$  平面  $PAE$ ；
- (2) 若  $BP \perp AE$ ，二面角  $A-PC-B$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ，求  $\cos \alpha$ 。



18. (17 分)

- (1) 证明：当  $x > 0$  时， $x > \sin x$ ；
- (2) 已知  $a > 0$ ，若  $\sin x^a > (\sin x)^a$  在  $x \in (0,1)$  恒成立，求  $a$  的取值范围；
- (3) 若存在  $a > 1$ ，使得  $\sin x^a > (\sin x)^a$  在  $x \in (0,b)$  恒成立，求  $b$  的取值范围。

19. (17分)

设  $n$  为不小于 3 的正整数, 集合  $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \leq x \leq n\}$ . 集合  $S \subseteq \mathbf{N}$  满足: 对任意  $a \in A$ , 总存在两两不相等的  $s_1, s_2, \dots, s_k \in S (k \geq 3)$ , 使得  $\sum_{i=1}^k s_i = a$ . 记集合  $S$  的元素个数为  $m$ .

(1) 证明:  $\{0, 1, 2\} \subseteq S$ ;

(2) 若  $m = 5$ , 求  $n$  的最大值;

(3) 记  $\lceil x \rceil$  为不小于  $x$  的最小整数. 证明:  $m$  的最小值为  $\left\lceil \log_2 \left( \frac{n}{3} \right) \right\rceil + 3$ .

**B 卷总负责人: 六月松**

**命题人: 六月松, Santa, 星玖, 七季  
wars, 悲伤浅笑吖, 丫尺丁, 港**

**排版: 六月松, Santa**

**感谢大家对星火杯和神算杯的支持!**

**2026.2.12**