

# 2025年8月“黎曼杯”新高二组试题

## 数 学

出题人（不分先后）：搁浅 皇甫重光 purplrguy（大章鱼） exp i（wpj）

姓名：\_\_\_\_\_ qq号：\_\_\_\_\_

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和qq号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型和考生号填涂在答题卡相应位置上。

2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应的题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再填涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

**一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。**

1. 已知  $z \in \mathbb{C}$ ， $\frac{1-i}{z} = 2+i$ ，则  $\bar{z}$  在复平面对应点所在的象限为（ ）

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

2. 下列有一串数据 3, 8, 5, 7, 6, 5, 9, 4，则它们的下四分位数为（ ）

- A. 2.5      B. 4      C. 4.5      D. 5.5

3.  $x^2 + 2y^2 = 2$ ，则  $\frac{xy+1}{x^2}$  的最小值为（ ）

- A.  $\frac{1}{8}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 余弦函数  $y = \cos x$ ，当  $0 \leq x \leq 4\pi$  时，在该函数图象上可找到  $n$  个不同的点，对于它们的坐标

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，使得  $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = \frac{y_n}{x_n}$ ，则  $n$  的值不可能为（ ）

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6

5. 已知三棱锥  $P-ABC$ ， $AB = AC = \sqrt{3}$ ， $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ ，平面  $PBC \perp$  平面  $ABC$ ，且  $P$  在平面

$ABC$  的投影点为  $BC$  中点， $PA = \sqrt{3}$ ，则三棱锥  $P-ABC$  外接球的表面积为（ ）

- A.  $3\pi$                       B.  $4\sqrt{3}\pi$                       C.  $12\pi$                       D.  $12\sqrt{3}\pi$

6. 已知  $a = 2^{0.1}$ ,  $b = 0.2^a$ ,  $c = \log_{0.3} a$ , 则 ( )

- A.  $a > c > b$                       B.  $a > b > c$                       C.  $b > a > c$                       D.  $b > c > a$

7. 已知  $\odot O$  的半径为  $R$ ,  $AB$  为直径,  $C, D$  为圆上两动点,  $E$  为  $OA$  中点, 则  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$  的取值范围为 ( )

- A.  $\left[-\frac{1}{8}R^2, 3R^2\right]$                       B.  $\left[-\frac{1}{4}R^2, 3R^2\right)$                       C.  $\left[-\frac{1}{8}R^2, \frac{10}{3}R^2\right]$                       D.  $\left[-\frac{1}{8}R^2, 3R^2\right)$

8. 已知平面向量  $a, b, c$ , 满足  $|a| = |b| = |a+b| = 3$ ,  $|c-b| = \frac{3\sqrt{21}}{14}$ , 则  $|ta + (1-t)c| (t \in \mathbf{R})$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{3\sqrt{7}}{14}$                       B.  $\frac{3\sqrt{14}}{14}$                       C.  $\frac{3\sqrt{21}}{14}$                       D.  $\frac{9\sqrt{63}}{14}$

**二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。**

9. 已知  $i$  为虚数单位，下列说法正确的有 ( )

- A.  $i^{\frac{2}{3}} = -1$   
 B. 若复数  $z = \frac{31+17i}{17+ai}$  为纯虚数，则  $a = -31$   
 C. 若复数  $z$  满足  $|z+1| - |z-i| = 0$ , 则  $|z+i|$  的最小值为  $\frac{1}{2}$   
 D. 已知复数  $z$  的模为 1, 则  $|z^3 - 3z + 2|$  的最大值为  $3\sqrt{3}$

10. 在  $\triangle ABC$  中，下列等式正确的有 ( )

- A.  $\sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$   
 B.  $\sin^2 B - \sin^2 A = \sin(B+A)\sin(B-A)$   
 C.  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ , 其中  $A, B, C \neq \frac{\pi}{2}$

D.  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

11. 以下叙述不正确的有 ( )

A. 若事件  $A, B, C$  两两独立, 则  $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

B. 若  $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ , 则事件  $A, B, C$  两两独立

C. 若  $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$ , 则事件  $A, B, C$  两两互斥

D. 若事件  $A, B, C$  两两互斥, 则  $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$

### 三、填空题:本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共计 15 分

12. 从  $1, 3, 5, 7, \dots, 25$  中任意选取五元数组  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ , 满足条件  $a_{i+1} - a_i \geq i+1$  (其中  $i=1, 2, 3, 4$ ), 则这样的五元数组数量为\_\_\_\_\_.

13. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \left| x - \frac{1}{x} \right| & (x \leq -2) \\ |\ln(x+4) - 3| & (-2 < x \leq 4) \\ -\frac{x^2}{2} + 4x & (x > 4) \end{cases}$ , 若方程  $f^2(x) - (5k-1)f(x) + 4k = 0$  有六个不相

等的实数根, 则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 设多项式  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 4$  有三个实数根  $a_1, a_2, a_3$ , 多项式  $g(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$  的

三个根  $b_1, b_2, b_3$ , 满足  $\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 \\ b_2 = a_3 + a_1\omega + a_2\omega^2 \\ b_3 = a_2 + a_3\omega + a_1\omega^2 \end{cases}$ , 其中  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ , 则  $g(x)$  的系数之和的实部为

\_\_\_\_\_.

### 四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 13 分)

已知  $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ ，且满足  $f(1) = 1$ ， $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$

- (1) 求  $f(x)$  的解析式；
- (2) 求方程  $f(x) = 0$  在复数范围内的根；
- (3) 求  $g(x) = f(x) + x^2$  图象的对称中心.

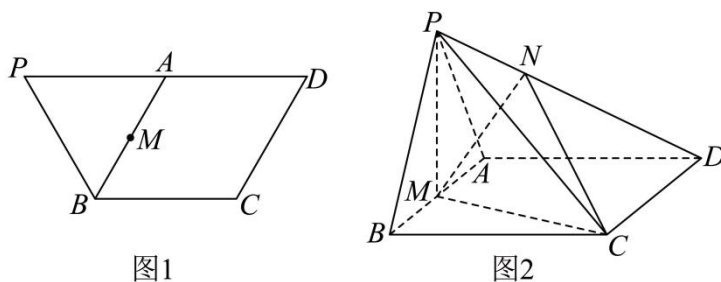
16. (本题满分 15 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且  $\sqrt{3}a \sin B + b \cos A = a + c$ .

- (1) 求角  $B$ ；
- (2) 若  $c = 2$ ， $D$  为  $AB$  中点， $E, F$  分别为  $AC, BC$  上一点，且  $FD \perp AB$ ， $EB$  平分  $\angle ABC$ ， $BA = BE$ ，求  $EF$  的长度.

17. (本题满分 15 分)

如图 1，四边形  $ABCD$  为菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\triangle PAB$  是边长为 2 的等边三角形，点  $M$  为  $AB$  的中点，将  $\triangle PAB$  沿  $AB$  边折起，使  $PC = 3$ ，连接  $PD$ ，如图 2.



- (1) 在图 2 中证明： $AB \perp PC$ ；
- (2) 求异面直线  $BD$  与  $PC$  所成角的余弦值；
- (3) 在线段  $PD$  上是否存在点  $N$ ，使得  $PB \parallel$  平面  $MCN$ ？若存在，请求出  $\frac{PN}{ND}$  的值；若不存在，请说明理由.

18. (本题满分 17 分)

一个果园有  $n$  棵果树, 在一次结果实的树的普查中得到  $n$  个数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 其中有  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , 试解决下面问题:

(1) 若  $n = 45$ , 且严格满足  $x_1 < x_2 < \dots < x_{45}$ , 若从中抽取两个数据, 不包括  $x_{25}$ , 求抽取的两个数据中至少有一个大于  $x_{25}$  的概率;

(2) 若  $n = 2025$ , 且严格满足  $x_1 < x_2 < \dots < x_{2025}$ , 若从中抽取 5 个数据, 不包括  $x_{1013}$ , 求抽出的五个数据中至少有两个大于  $x_{1013}$  的概率;

(3) 在一系列统计计算后发现平均数  $\bar{x} = a$ , 方差  $S_x = b$ ,  $a, b$  为给定正实数, 求  $x_n$  的可能最大值 (用含  $a, b, n$  的式子表示).

参考公式: 从  $M$  个数中抽取  $N$  个数可表示为  $C_M^N = \frac{M!}{N!(M-N)!}$ , 其中  $T! = 1 \times 2 \times \dots \times T$

19. (本题满分 17 分)

法国数学家笛卡尔 (Descartes) 曾言: “一切问题都可以转化为数学问题, 一切数学问题都可以转化为代数问题, 一切代数问题都可以转化为方程问题.” 方程在数学界有着举足轻重的地位, 而因式分解与换元法是解决方程问题的两大利器.

(1) 求以下方程在实数域中的所有根:

$$x^8 + 18x^7 + 124x^6 + 408x^5 + 654x^4 + 480x^3 + 173x^2 + 30x + 2 = 0$$

(2) 方程、三角函数和复数是不分家的

(i) 求解实数域中的方程:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

(ii) 求解复数域中的方程:

$$x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x - 4 = 0$$