

2026年2月第二届“黎曼杯”高考模拟

数 学

出卷人: purpleguy (大章鱼)、搁浅、皇甫重光、exp i (wpj)、寻忆、六月松

姓名: _____ qq号: _____

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和 qq 号填写在答题卡上. 用 2B 铅笔将试卷类型和考生号填涂在答题卡相应位置上.
2. 选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应的题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再填涂其他答案. 答案不能答在试卷上.
3. 非选择题须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案, 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共计 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是正确的)

1. 若集合 $M = \{x \mid \sqrt{x^3} < 3\sqrt{3}\}$, 集合 $N = \{x \mid 2x^3 \geq 16\}$, 则 $M \cap N =$

- (A) $\{x \mid 0 < x \leq 2\}$ (B) $\{x \mid 2 \leq x < 3\}$ (C) $\{x \mid 2 \leq x < 9\}$ (D) $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$

2. 已知 $z = 2 + 3i$, 则 $|z| =$

- (A) 2 (B) $\sqrt{13}$ (C) 13 (D) 3

3. $(3x^2 - 5x - 2)^4$ 的展开式中 x 的系数为

- (A) -500 (B) -224 (C) 224 (D) 160

4. 已知 $\frac{1}{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$

- (A) $\pm \frac{2\sqrt{21}}{25}$ (B) $-\frac{2\sqrt{21}}{25}$ (C) $\pm \frac{4\sqrt{21}}{25}$ (D) $-\frac{6\sqrt{21}}{25}$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{25} - S_4 = 420$, 则 a_{15} 的值为

- (A) 20 (B) 15 (C) 25 (D) 30

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 A 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点, F 为其右焦点, 延

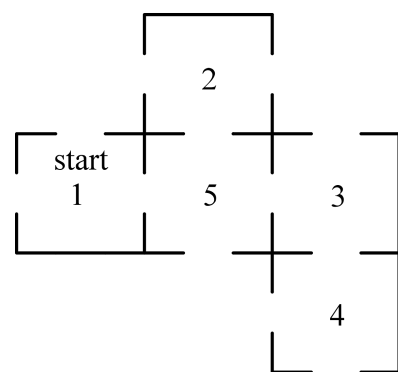
长 AO , AF 分别交椭圆于异于 A 的两点 M, N , 若 $MF \perp AN$, 且 $2\overrightarrow{NF} = \overrightarrow{FA}$, 则该椭圆的离心率为

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 若 x, y 为正实数, $xy = 1$, 则 $\min\left\{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}\right\}$ 和 $\max\{3x - 3, 2y - 4\}$ 的乘积的最大值为

- (A) $\frac{5-2\sqrt{6}}{2}$ (B) $\frac{7-4\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{5-2\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{7-4\sqrt{3}}{3}$

8. 某实验容器由五个仓组成, 一个粒子初始位于 1 号仓中开始做无规则随机运动, 即从所在仓的通道口中随机选择一个到达相邻仓或者容器外, 但粒子到达容器外就会被外部装置所捕获, 此时实验结束. 则实验结束时该粒子是从 1 号仓到达容器外的概率为



- (A) $\frac{141}{236}$ (B) $\frac{142}{237}$
(C) $\frac{158}{213}$ (D) $\frac{159}{214}$

二、选择题 (本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共计 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, P, Q 分别是 A_1D_1, CD 的中点, 则下列说法正确的有

- (A) PQ 与 BC 不是异面直线 (B) AC 不与平面 PQB_1 垂直
(C) $\sin \angle PBQ = \frac{\sqrt{145}}{15}$ (D) 三棱锥 $C_1 - PQB$ 的体积为 $\frac{5}{3}$

10. 下列结论正确的有

- (A) 数据 $-1, 2, -3, -4, 5, 6, 7, -8, 9$ 的上四分位数为 6

(B) 变量 x 和变量 y 的样本相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, 则 $r = 0$ 时, 变量 x 和

变量 y 可能不存在线性相关关系

(C) 设 A, B 是一个随机试验中的两个事件, $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(\bar{B}) = P(\bar{B}|A)$, $P(A + \bar{B}) = \frac{3}{4}$, 则

$$P(A\bar{B} + \bar{A}B) = \frac{5}{12}$$

(D) 随机变量 $X \sim N(4, 8)$, 随机变量 $Y \sim N(9, 16)$, 则 X 的密度函数的极大值是 Y 的密度函数极大值的 $\sqrt{2}$ 倍

11. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$, 则下列说法正确的有

(A) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ 恒成立

(B) 若 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$, 则 $f(x)$ 的最大值为 3

(C) 记 $f^{(n)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 阶导数, 则 $\sum_{i=1}^{2026} f^{(i)}(x) = 0$ 恒成立

(D) 若 $f\left(\frac{\pi}{20}\right) = f\left(\frac{19\pi}{20}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, 则 $\sum_{i=0}^{2026} f\left(\frac{2i+1}{3}\pi\right) = 3$

三、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共计 15 分)

12. 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 4$ 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6$, 则 \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 上的投影向量的模长为_____.

13. 已知两定点 $A(-1, 0), B(5, 0)$, 点 C 在曲线 $2x^2 - 8x - y^2 + 2 = 0$ 上, 若点 A, B, C 能构成三角形, 且有一条垂直于 x 轴的直线同时过 $\triangle ABC$ 的重心和内心, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为_____.

14. 记 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x[x] + x\left[\frac{1}{x}\right] + 2x}$ 的值域为_____.

四、解答题（本大题共 5 小题，共计 77 分）

15.（本题满分 13 分）

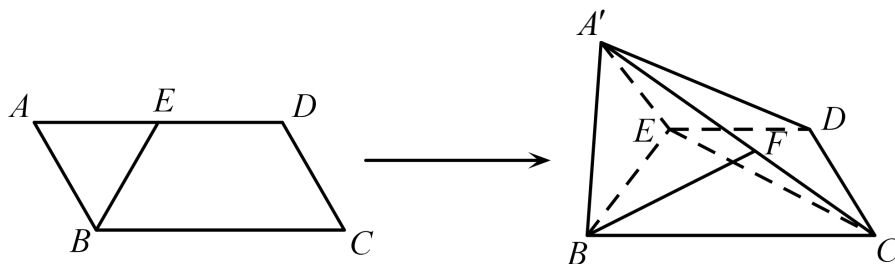
已知在三角形 ABC 中， $a^2 = b^2 + bc$ ， $\sin B = \frac{3}{5}$.

(1) 求 $\sin C$ ；

(2) 若 D 在线段 BC 上，且 $\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，求 $\frac{CD}{BD}$.

16.（本题满分 15 分）

如图，已知四边形 $ABCD$ （ A, B, C, D 四点逆时针排列）是平行四边形， $AD = 2AB = 2$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，记 AD 边上的中点为 E . 现将 $\triangle ABE$ 沿着 BE 翻折至 $\triangle A'BE$ ，连接 $A'D, A'C$ ，且此时 $A'C = 2$.



(1) 试判断 CE 与平面 $A'BE$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 在线段 $A'C$ 上是否存在一点 F ，使得平面 FBE 与平面 $BEDC$ 所成角的余弦值为 $\frac{4}{\sqrt{17}}$ ？若存在，求出 $A'F$ 的值；若不存在，请说明理由.

17. (本题满分 15 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，一条斜率存在的直线 l 过点 F ， l 与 C 交于 A, B 两点，过 A, B 分别作 C 的切线 l_1, l_2 ，记两条切线的交点为 P ，过线段 AB 的中点 D 作线段 AB 的中垂线交 x 轴于点 E ，且 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{2}$ 。

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 求证：四边形 $PFED$ 是平行四边形；

(3) 记 PF 交 y 轴于点 Q ， $\triangle PBQ, \triangle PAD$ 的面积分别为 S_1, S_2 ，求 $\frac{S_2}{S_1}$ 的取值范围。

18. (本题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x, x > 0$ 。

(1) 试求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2) 给定函数 $g(x) = e^x, x > 0$ ，设函数 $\rho(x) = g(x) - f(x) - kx - 1$ 。若函数 $\rho(x)$ 有两个零点，将其分别记为 α, β 。

① 试求 k 的取值范围；

② 证明： $k > \alpha + \ln \beta + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

19. (本题满分 17 分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{(a_n+1)(a_{n+2}+1)}{(a_{n+1}+1)^2} = \frac{n+2}{n+1}$, 且 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = a_n + 1$, 且 $n < 4$ 时 $c_n = b_n$, $n \geq 4$ 时 $c_n = \frac{b_n}{6b_{n-3}}$.

① 证明: $\frac{2}{n} \ln b_n \leq \ln \frac{n+1}{2} + \ln \frac{n+2}{3}$;

② 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\lambda S_n \geq S_{2n}$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

恭喜您完成本卷全部题目!

黎曼杯命题组全体成员谨在此向您致以诚挚谢意, 感谢您为本届杯赛所作出的重要贡献!